Untersuchungen von Funktionen 1

Führen Sie für die Funktionen diese Untersuchungen durch :

- Untersuchen Sie den Graphen auf Symmetrie.
- Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte im Unendlichen.
- Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen.
- Untersuchen Sie, ob der Graph Hoch–, Tief–, Wende– und Sattelpunkte besitzt und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Koordinaten.
- Zeichnen Sie den Graph in einem sinnvollen Bereich.

Wählen Sie selbst einige der folgenden Funktionen aus und führen Sie einige der Zusatzuntersuchungen durch :

- Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graph im Punkt $P(2/f(2))$.
- Bestimmen Sie die Gleichung der Normale an den Graphen im Punkt $P(2/f(2))$.
- Die Tangente und die Normale aus den vorigen Absätzen und die Abszisse bilden ein Dreieck. Bestimmen Sie seinen Flächeninhalt.
- Falls die Funktion Wendepunkte hat : Bestimmen Sie die Gleichung einer der Wendetangenten.
- Bestimmen Sie die Gleichung aller Geraden, die durch den Ursprung gehen und Tangente an den Graphen in einem Punkt $P(x/f(x))$ sind.
- Bestimmen Sie alle Punkte des Graphen, in denen die Funktion die Steigung 2 hat. Gibt es mehrere solcher Punkte, bestimmen Sie den Abstand der Tangenten durch diese Punkte.

1.) $f(x)=x^2-5x+6$

2.) $f(x)=0{,}25x^2-x+2$

3.) $f(x)=2x^3-6x^2+10x$

4.) $f(x)=-2x^3+6x^2-5x$

5.) $f(x)=x^4-9x^2+8$

6.) $f(x)=x^4-5x^2+10$

7.) $f(x)=-2x^4+12x^3-10x^2$

8.) $f(x)=x^4-x^3-x^2$

9.) $f(x)=x^5-x^3+x$

10.) $f(x)=x^6+x^4-x^2$

11.) $f(x)=0{,}05x^4-0{,}22x^3+0{,}25x^2$

12.) $f(x)=x^3-x$

13.) $f(x)=x^3+x$

14.) $f(x)=x^3-x^2$

15.) $f(x)=x^4+x^3$

16.) $f(x)=x^4+x$

17.) $f(x)=0{,}25x^4+x$

18.) $f(x)=x^5-x^3$

19.) $f(x)=0{,}1x^5-2x$

20.) $f(x)=x^4-3x^2+4$

21.) $f(x)=x^4-3x^2+2$

22.) $f(x)=x^3-3x^2+2x$

weitere Funktionen auf dem nächsten Blatt

Untersuchungen von Funktionen 2

23.) $f(x) = x^6 - 3x^4 + 2x^2$

24.) $f(x) = x^6 - 3x^3 + 2$

25.) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$

26.) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2{,}25\,x^2$

27.) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2{,}4\,x^2$

28.) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2{,}53125\,x^2$

29.) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2$

30.) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3{,}375\,x^2$

31.) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2$

32.) $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3$

33.) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

34.) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

35.) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 16$

36.) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

Untersuchungen von Funktionen – einige Lösungen

Es werden nur die x–Werte der Nullstellen, Extrema und Wendepunkte angegeben. Ist der Wert eines Wendepunktes unterstrichen, so ist er ein Sattelpunkt.

Aufgabe	Nullstellen			Extrema			Wendepunkte		
1.)	2	3		2,5			–		
2.)	–			2			–		
3.)	0			–			1		
4.)	0			0,592	1,408		1		
5.)	±1	±2,828		0	±2,121		±1,225		
6.)	–			0	±1,581		±0,913		
7.)	0	1	5	0	0,649	3,851	0,310	2,690	
8.)	–0,618	0	1,618	–0,425	0	1,175	–0,229	0,729	
9.)	0			–			0	±0,548	!
10.)	0	±0,786		0	±0,577		±0,356		
11.)	0			0	1,178	2,122	0,486	1,714	!
12.)	0	±1		±0,577			0		
13.)	0			–			0		
14.)	0	1		0	0,667		0,333		
15.)	–1	0		–0,75			–0,50	<u>0</u>	
16.)	–1	0		–0,630			–		
17.)	–1,587	0		–1			–		
18.)	0	±1		±0,775			<u>0</u>	±0,548	
19.)	0	±2,115		±1,414			0		
20.)	–			0	±1,225		±0,707		
21.)	±1	±1,414		0	±1,225		±0,707		
22.)	0	1	2	0,423	1,577		0		
23.)	0	±1	±1,414	0	±0,650	±1,256	±0,352	±1,037	
24.)	1	1,260		1,145			<u>0</u>	0,843	
25.)	0	1	2	0	0,610	1,640	0,271	1,229	
26.)	0	1,5		0	0,75	1,5	0,317	1,183	
27.)	0			0	0,869	1,381	0,347	1,153	
28.)	0			0			0,375	<u>1,125</u>	
29.)	0			0			0,5	1	
30.)	0			0			–		!
31.)	0			0			–		
32.)	0	1	2	0,710	1,690		0 0,442	1,358	
33.)	–2	1		–1	1		0		
34.)	–1	1		–0,333	1		0,333		
35.)	2			2			0 1,333		
36.)	–1	1	3	–0,155	2,155		1		

Rekonstruktion von Funktionen 1

1.) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel durch die Punkte $P_1(0/0)$, $P_2(2/0)$ und $P_3(3/9)$.

2.) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel durch $P_1(0/0)$, die in $P_2(1/1)$ die Steigung 4 hat.

3.) Bestimmen Sie die Gleichung der ganzrationalen Funktion 3. Grades, die in $P_1(0/1)$ ein Extremum und in $P_2(1/3)$ einen Wendepunkt hat.

4.) Bestimmen Sie die Gleichung der ganzrationalen Funktion 3. Grades, die in $P_1(1/1)$ einen Sattelpunkt und in $P_2(0/f(0))$ die Steigung 10 hat.

5.) Bestimmen Sie die Gleichung der ganzrationalen Funktion 3. Grades, die in $P_1(1/1)$ einen Sattelpunkt und in $P_2(0/5)$ die Steigung 10 hat.

6.) Bestimmen Sie die Gleichung der ganzrationalen Funktion 3. Grades, die in $P_1(0/0)$ einen Wendepunkt und in $P_2(2/-4)$ die Steigung 2 hat.

7.) Bestimmen Sie die Gleichung der ganzrationalen Funktion 3. Grades, die durch den Ursprung geht und bei $x=3$ ein Extremum hat. In ihrem Wendepunkt bei $x=2/3$ hat sie die Steigung $m=-49/3$.

8.) Bestimmen Sie die Gleichung der ganzrationalen Funktion 3. Grades, die durch $P_1(0/1)$ geht, und die in $P_2(1/2)$ einen Wendepunkt hat, dessen Tangente durch den Ursprung geht.

9.) Bestimmen Sie die Gleichung der ganzrationalen Funktion 4. Grades, die im Ursprung und in $P_1(3/6{,}75)$ Extrema und an der Stelle $x=1$ die Steigung 4 hat.

10.) Bestimmen Sie die Gleichung der ganzrationalen Funktion 4. Grades, die in $P_1(0/0)$ ein Extremum und in $P_2(1/-1)$ einen Sattelpunkt hat.

11.) Bestimmen Sie die Gleichung der ganzrationalen Funktion 4. Grades, die bei $x=1$ und bei $x=\sqrt{2}$ Nullstellen, bei $x=0$ ein Extremum und in $P_1(0{,}5\cdot\sqrt{2}\ /\ 0{,}75)$ einen Wendepunkt hat.
Hinweis : Dies ist eine rechenaufwendige Aufgabe.

12.) Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades berührt die Winkelhalbierende des ersten Quadranten bei $x=1$ und ändert sein Krümmungsverhalten in $P(0/0{,}5)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

13.) Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung und schneidet den Graphen von $g(x)=2x^3+0{,}5x$ im Ursprung senkrecht. Ein zweiter Schnittpunkt mit g liegt bei $x=1$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Rekonstruktion von Funktionen 2

14.) Bestimmen Sie die Gleichung der ganzrationalen Funktion 4. Grades, die achsensymmetrisch zur f(x)–Achse ist, durch $P(0/2)$ geht und in seinem Extremum bei $x=2$ die x–Achse berührt.

15.) Der Graph einer ganzrationalen Funktion f fünften Grades hat in $P_1(1/12)$ ein Extremum und wird im Koordinatenursprung von dem Graphen der Parabel $g(x)=x^2-6\mathrm{x}$ berührt. An der Stelle $x=2$ verläuft die Tangente von f senkrecht zur Geraden $h(x)=12x+1$. Der Graph von f' hat in $P_2(0{,}5/f'(0{,}5))$ eine Tangente mit der Steigung –5.

16.) Zeigen Sie, dass jede ganzrationale Funktion 3. Grades genau einen Wendepunkt hat.

17.) Gegeben ist eine Funktion mit der Gleichung $f(x)=a\,x^4+c\,x^2+e$. Welche Bedingung muss zwischen den Koeffizienten gelten, damit sie 2 Wendepunkte hat ?

Rekonstruktion von Funktion – einige Lösungen

1.) $f(x)=3x^2-6\mathrm{x}$

2.) $f(x)=3x^2-2x$

3.) $f(x)=-x^3+3x^2+1$

4.) $f(x)=10/3\,x^3-10x^2+10x-7/3$

5.) Es gibt keine Funktion, die alle Bedingungen erfüllt.

6.) Bedingungen : $f(0)=0$, $f''(0)=0$, $f(2)=-4$, $f'(2)=2$

7.) Bedingungen : $f(0)=0$, $f'(3)=0$, $f''(2/3)=0$, $f'(2/3)=-49/3$

8.) $f(x)=-x^3+3x^2-x+1$

9.) $f(x)=0{,}25x^4-2\mathrm{x}^3+4{,}5x^2$

10.) $f(x)=-3x^4+8x^3-6x^2$

11.) $f(x)=x^4-3\mathrm{x}^2+2$ Kommt Ihnen diese Funktion bekannt vor ? Sehen Sie doch mal auf dem Blatt „Untersuchung von Funktionen“ unter Aufgabe 21.) nach.

12.) $f(x)=0{,}25x^3+0{,}25x+0{,}5$

13.) $f(x)=4{,}5x^3-2x$

14.) $f(x)=0{,}125x^4-x^2+2$

15.) Bedingungen : $f(1)=12$, $f'(1)=0$, $f(0)=0$,
$f'(0)=-6$, $f'(2)=-1/12$, $f''(0{,}5)=-5$

Gleichung : $f(x)=\frac{503}{264}x^5+\frac{3293}{528}x^4-\frac{6361}{132}x^3+\frac{30649}{528}x^2-6x$

Extremwertaufgaben 1

1.) Ein Bauer will mit 50 m Zaun einen möglichst großen Hühnerhof einzäunen. Wie soll er die Maße wählen ?

a.) freiliegender Hof wie in Abb. 1.

b.) Hof an der Hauswand wie in Abb. 2.

c.) doppelter Hof an der Hauswand wie in Abb. 3.

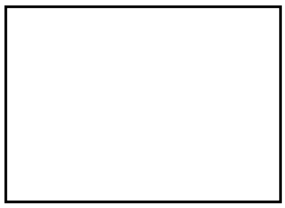


Abb. 1

Abb. 2

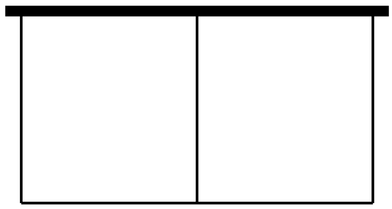


Abb. 3

2.) Ein Fenster soll eine Fläche von 1 m^2 haben. Ränder und Streben sollen (da die Verarbeitung dieser Teile teuer ist) möglichst geringe Länge haben. Wie sind die Maße zu wählen ?

a.) rechteckiges Fenster wie in Abb. 4.

b.) rechteckiges Fenster mit einer Strebe wie in Abb. 5.

c.) rechteckiges Fenster mit aufgesetztem Halbkreis wie in Abb. 6.

d.) rechteckiges Fenster mit aufgesetztem Halbkreis und einer Strebe wie in Abb. 7.

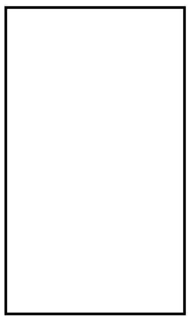


Abb. 4

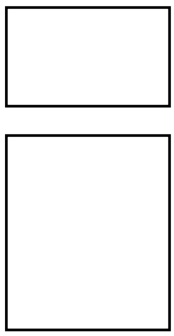


Abb. 5

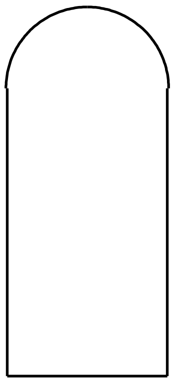


Abb. 6

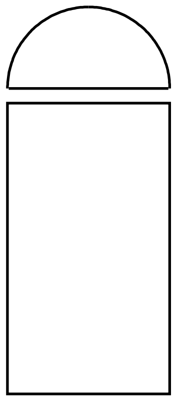


Abb. 7

3.) Aus einem rechteckigen Blech der Größe 1m^2 (die Seitenlänge a beträgt 1,20 m) sollen an den 4 Ecken gleich große quadratische Stücke ausgeschnitten werden (siehe Abb. 8), um daraus eine oben offene Kiste herzustellen. Wie groß müssen die ausgeschnittenen Quadrate sein, damit der Inhalt möglichst groß wird ?

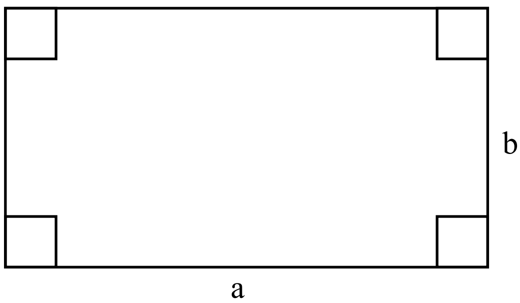


Abb. 8

Extremwertaufgaben 2

4.) Eine Streichholzschachtel hat eine Länge von 5 cm und ein Volumen von 20 cm³. Ihre Breite sei b und ihre Höhe h. Zur Herstellung der Schachtel selbst wird ein rechteckiges Stück Pappe benötigt, aus dem 4 Quadrate ausgestanzt werden (siehe Abb. 8). Für die Umhüllung braucht man ein weiteres rechteckiges Stück Pappe (siehe Abb. 9).

Wie sind b und h zu wählen, damit möglichst wenig Material verbraucht wird ?

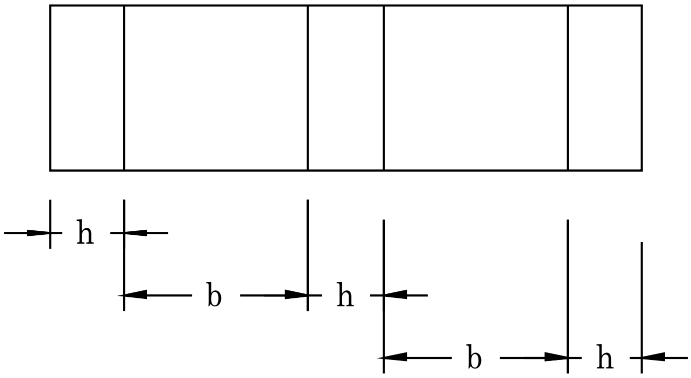


Abb. 9

5.) Ein Sportplatz soll die Form eines Rechtecks mit 2 angesetzten Halbkreisen und eine möglichst große Fläche haben (siehe Abb. 10). Der Umfang ist 400 m. Wie sind seine Maße zu wählen ?

Abb. 10

6.) Dose I

a.) Eine zylindrische Dose (natürlich mit Boden und Deckel) hat ein Volumen von 1 l und soll (zur Materialersparnis) eine möglichst geringe Oberfläche haben. Wie sollte man ihre Maße wählen ?

Haben normale Konservendosen diese Form ? Warum wohl ?

b.) Eine zylindrische Dose (wieder mit Boden und Deckel) hat eine Oberfläche von 0,1 m^2 und soll ein möglichst großes Volumen haben. Wie sollte man ihre Maße wählen ?

7.) Dose II

a.) Eine zylindrische Dose (mit Boden, aber ohne Deckel) hat ein Volumen von 1 l und soll eine möglichst geringe Oberfläche haben. Wie sollte man jetzt die Maße wählen ?

b.) Eine zylindrische Dose (ohne Boden und ohne Deckel) hat ein Volumen von 1 l und soll eine möglichst geringe Oberfläche haben. Wie sollte man ihre Maße wählen ?

8.) Dose III

a.) Realistischer ist, ist Dose (mit Boden und Deckel) aus einem rechteckigen Stück Blech wie in Abb. 11 herzustellen. Wie sollte man die Maße der Dose (Volumen 1 l) wählen, um möglichst wenig Material zu verbrauchen ?

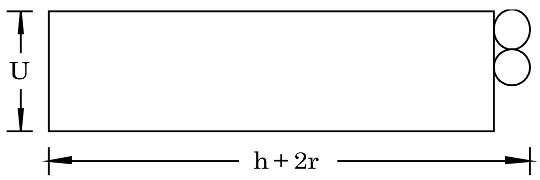


Abb. 11

b.) Bei der Dosenherstellung nach Teil a.) entstehen Abfälle. Man kann sie für 30 % der Kosten des Einkaufs wieder verkaufen. Wie sollte man die Maße der Dose wählen, um möglichst niedrige Kosten zu erzielen ?

c.) Fritze Fröhlich schlägt vor, die kreisförmigen Boden– und Deckelbleche nicht wie in Abb. 11 rechts, sondern unten anzuordnen. Kann man auf diese Weise Material sparen ? Wie sollte man die Maße der Dose (Volumen 1 l) wählen, um möglichst wenig Material zu verbrauchen ?

Extremwertaufgaben 3

9.) In eine Kugel mit dem Radius R soll ein Zylinder maximalen Volumens einbeschrieben werden. Wie sind seine Maße zu wählen ?

10.) a.) In eine Halbkugel mit dem Radius R soll ein stehender Zylinder maximalen Volumens einbeschrieben werden. Wie sind seine Maße ?

b.) In eine Halbkugel mit dem Radius R soll ein liegender Zylinder maximalen Volumens einbeschrieben werden. Wie sind seine Maße ?

11.) In der Verkehrsplanung berechnet man den Sicherheitsabstand s von 2 Fahrzeugen nach der Formel $s = s_1 + s_2 + s_3$. Dabei ist $s_1 = 20$ m die Länge eines langen Fahrzeugs. $s_2 = vt$ ist der Reaktionsweg. Er berechnet sich aus der gefahrenen Geschwindigkeit v und der Reaktionszeit t = 1 s. Schließlich ist $s_3 = v^2 / 2a$ der Bremsweg, wobei gilt $a = 4 \text{ m} / \text{s}^2$.

a.) Bei welcher Geschwindigkeit hat die Straße den höchsten Durchsatz, das heißt sie kann gefahrlos (!!) von einer möglichst großen Zahl von Fahrzeugen befahren werden ?

b.) Eine andere Straße ist nur für Pkw zugelassen, so dass $s_1 = 6$ m beträgt. Wie ändert sich die Geschwindigkeit des höchsten Durchsatzes ?

12.) Eine Coladose der Höhe H hat ein Leergewicht von 20 g. Die Füllung der vollen Dose beträgt 200 g.

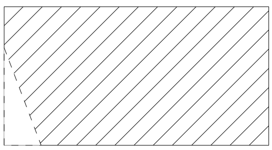
a.) Bei welcher Füllhöhe liegt der Schwerpunkt am niedrigsten ?

b.) Nennen Sie mindestens 3 Annahmen (Idealisierungen, Näherungen), die Ihre Rechnungen überhaupt erst möglich machen und prüfen Sie, ob diese bei realen Dosen erfüllt sind.

c.) Versuchen Sie ohne Rechnung zu entscheiden, ob ein noch niedrigerer Schwerpunkt eher bei einer Dose aus schwerem Material oder aus leichtem Material zu erreichen wäre.

Hinweis : Bei robotergesteurter automatischer Fertigung ist ein solches Problem sicher wichtiger als beim Leeren einer Coladose auf einer Party.

13.) Von einer Glasscheibe der Länge 1,50 m und der Breite 0,75 m ist eine Ecke (50 cm lang und 10 cm breit) wie in der Abbildung abgesprungen. Aus dem Rest soll eine neue, möglichst große und rechteckige Scheibe gefertigt werden. Wie sind ihre Maße zu wählen ?



Extremwertaufgaben – einige Lösungen

Für viele Aufgaben werden Haupt– und Nebenbedingung oder das Ergebnis angegeben.

1.) a.) 12,5 m x 12,5 m

b.) Mit geeigneten Bezeichnungen erhält man A(a,b) = ab und b = 50 – 2a. Es folgt a = 12,5 m und b = 25 m.

c.) 8,33 m x 25 m

2.) a.) quadratisch, wie sonst. Die klassische Fenstergestaltung erfolgt nach dem Goldenen Schnitt : (a+b) / a = a / b.

b.) a : Summe der Höhe der beiden Fensterteile, b : Breite des Fensters

U(a,b) = 2a + 4b und ab = 1. Es folgt a = 1,41 m und b = 0,71 m.

c.) a : Höhe des rechteckigen Teils, b : Breite des Fensters. U(a,b) = 2a + b + 0,5 • p • b und 1 = ab + 1/8 • p • b^2. Es folgt b = 1,058 m und b = a/2.

d.) a und b sind wie in c.) gewählt. U(a,b) = 2a + 3b + 0,5 • p • b. Es folgt a = 0,727 m und b = 1,090 m.

3.) Sei c die Seitenlänge der Quadrate. V(a,b,c) = (a – 2c) • (b – 2c) • c. Es folgt c = 0,161 m. Die (Schein–)lösung c = 0,516 m entfällt aus geometrischen Gründen.

4.) A(b,h) = (5 + 2h) • (b + 2h) + 5 • (2b + 3h). Die Gleichung $8h^3 + 25h^2 – 60 = 0$ ist mit dem Newton–Verfahren zu lösen. Es folgt h = 1,302 cm und b = 3,073 cm. Wir haben vernachlässigt, dass die Umhüllung etwas größer sein muss als die Schachtel.

5.) Mit geeigneten Bezeichnungen erhält man A(a,b) = ab + 0,25 • p • b^2 und 2a + p • b = 400. Der Platz wird exakt kreisförmig mit einem Radius von ca. 63,66 m. Sollte ihr Platz eine kurze Gerade besitzen, sind Rundungsfehler aufgetreten.

Hinweis : In den folgenden Aufgaben ist h die Höhe der Dose bzw. des Zylinders und r ihr Radius.

6.) a.) O(r,h) = 2 p • r • h + 2 p • r^2 und 1 = p • r^2 • h . Es folgt r = 5,42 cm und h = 2 r. Verkaufspsychologie – oder es könnten lange Wiener drin sein.

b.) Vertausche Haupt– und Nebenbedingung gegenüber a.). Es folgt r = 7,28 cm und h = 2 r.

7.) a.) O(r,h) = 2 p • r • h + p • r^2 und 1 = p • r^2 • h . Es folgt r = 6,83 cm und h = r.

b.) Die Differentialrechnung hilft hier nicht weiter. r sollte möglichst groß sein.

8.) a.) Aus A(r,h) = 2 p • r • (2r + h) folgt r = 4,30 cm und h = 4 r.

c.) Informieren Sie sich über Randextrema.

9.) V(r,h) = p • r^2 • h und $R^2 = r^2$ + 1/4 • h^2 . Es folgt h = 2 R / sqrt(3) und r = R sqrt(2/3).

10.) a.) V(r,h) = p • r^2 • h und $R^2 = r^2 + h^2$. Es folgt h = R / sqrt(3) und r = R sqrt(2/3).

b.) V(r,h) = p • r^2 • h und R^2 = 4 r^2 + 1/4 • h^2 . Es folgt h = 2 R / sqrt(3) und r = R sqrt(6).

11.) a.) Minimiere die Zeit zwischen 2 Kfz. Sie beträgt t(v) = (20 + v + v^2/8) / v. Es folgt v = 45,5 km/h. Bei dieser Geschwindigkeit können 865 Kfz pro Stunde die Straße befahren.

b.) v = 24,9 km/h. 1317 Kfz pro Stunde.

12.) a.) Für die Lage des Schwerpunkts gilt : s = (m_{Dose} • H/2 + m_{Inhalt} • h/2) / (m_{Dose} + m_{Inhalt}). Dabei ist m_{Inhalt} = h / H • 200. Man erhält h = 0,2316 • H.

b.) zylinderförmige Dose, symmetrische Massenverteilung, randvolle Dose

c.) leichteres Material (!!). Allerdings ist bei schwerem Material das Trägheitsmoment höher.